Calcul : quelques bases

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux. Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. Ce document rappelle quelques bases incontournables.

I Développer et Factoriser

Rappel:

Identités remarquables : pour tous a et b réels ou complexes on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exercice 1: Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x :

a) $-(5x-4)(x-2)$ **b)** $\frac{5}{2}(2x-5)^2$

c) $(3x-5)(3x+5)-3(x^2+1)$ **d)** $(x+x^2)^2$

e) $(5x+1)^2-(5x-1)^2$ **f)** $(3x+1)^3$

Exercice 2: Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes :

a) $-(5x-4)(x-2)+(5x-4)$ **b)** $\frac{5}{2}(2x-5)^2-(2x-5)$

c) $(3x-5)^2-(9x+1)^2$ **d)** $(x+x^2)^2-(x+1)^2$

e) $36x^2-4-(x+5)(6x-2)$ **f)** x^4-1

Correction:

ex 1.

a) $-5x^2+14x-8$, **b)** $10x^2-50x+\frac{125}{2}$, **c)** $6x^2-28$, **d)** $x^4+2x^3+x^2$,
e) $20x$, **f)** $(3x+1)(3x+1)^2 = (3x+1)(9x^2+6x+1) = 27x^3+27x^2+9x+1$

ex 2.

a) $(5x-4)(-(x-2)+1) = (5x-4)(-x+3)$,
b) $(2x-5)(\frac{5}{2}(2x-5)-1) = \frac{1}{2}(2x-5)(10x-27)$
c) $(3x-5-(9x+1))(3x-5+9x+1) = (-6x-6)(12x-4) = -24(x+1)(3x-1)$
d) $x^2(1+x)^2-(x+1)^2 = (x+1)^2(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^3$
e) $(6x-2)(6x+2)-(x+5)(6x-2) = (6x-2)(6x+2-x-5) = (6x-2)(5x-3)$
f) $x^4-1 = (x^2)^2-1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

II Expressions rationnelles

Rappel:

Règles de calcul sur les fractions : Soient a, b, c, d et k des nombres réels ou complexes tels que $b \neq 0, d \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ mais ⚠ $\frac{a}{b}+\frac{a}{d} \neq \frac{a}{b+d}$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ • $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{k\times a}{k\times b} = \frac{a}{b}$ (k doit être <u>en facteur</u> au numérateur et au dénominateur)
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ (ici il faut aussi $c \neq 0$)

Exercice 3: Réduire au même dénominateur et/ou simplifier les expressions rationnelles suivantes, supposées bien définies :

a) $\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{5}{6}-1$ **b)** $3+\frac{2}{x-2}$ **c)** $\frac{2x}{2x-1}+\frac{x+2}{x+3}$

d) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^2-x}$ **e)** $\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{1+n}-\frac{1}{n}$ **f)** $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$

Correction:

ex 3.

a) $\frac{4^2}{3^2}-\frac{5}{6}-1 = \frac{16\times 2-5\times 3-18}{18} = -\frac{1}{18}$, **b)** $\frac{3(x-2)+2}{x-2} = \frac{3x-4}{x-2}$,

c) $\frac{2x}{2x-1}+\frac{x+2}{x+3} = \frac{2x(x+3)+(x+2)(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} = \frac{4x^2+9x-2}{(2x-1)(x+3)}$

d) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x(x-1)} = \frac{x^2+3}{x(x-1)}$,

e) $\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{1+n}-\frac{1}{n} = \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}$

f) $\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6n^2(n+1)(n-1)^2}{4n(n-1)(n-1)(n+1)} = \frac{3}{2}n.$

III Calcul de dérivées

Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Les fonctions sont à valeurs réelles.

Quelques dérivées usuelles :

Fonction $f(x) =$	**Domaine**	**Dérivée $f'(x) =$**
c (constante)	$\mathbb{R}$	0
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$

Rappel:

Dérivation et opérations : somme, produit, quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions λu, $u+v$ et uv sont dérivables sur I avec

- $(\lambda u)' = \lambda u'$;
- $(u+v)' = u' + v'$;
- $(uv)' = u'v + uv'$;

Si, de plus, v ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I avec

- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 4: Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par

a) $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^5 + 3x^2 + 3$

b) $x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 3x + 1)\sin(x)$

c) $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x\ln(x)$

d) $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$

e) $x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$

f) $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+x^2}$.

Correction:

ex 4.

a) $f'(x) = 5x^4 + 3 \times 2x + 0 = 5x^4 + 6x$,

b) $f'(x) = (2x+3)\sin(x) + (x^2+3x+1)\cos(x)$ avec $(uv)' = u'v + uv'$

c) $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$,

d) $f'(x) = -\dfrac{1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}{(x\mathrm{e}^x)^2} = -\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)}{x^2(\mathrm{e}^x)^2} = -\dfrac{1+x}{x^2\mathrm{e}^x}$ avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)(1+x^2) - \cos(x)(2x)}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{(1+x^2)\sin(x) + 2x\cos(x)}{(1+x^2)^2}$

avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(2x+x^2) - \ln(x)(2+2x)}{(2x+x^2)^2} = \dfrac{2+x-2\ln(x)(1+x)}{(2x+x^2)^2}$.

Remarque : le but sera ensuite d'étudier le signe de la dérivée pour en déduire les variations de la fonction, c'est pourquoi il est inutile de développer un dénominateur au carré (questions **e)** et **f)**). En effet, on remarque alors immédiatement que le dénominateur est (strictement) positif.