Calcul littéral : quelques bases

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux. Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. Ce document rappelle quelques bases incontournables.

I Développer et Factoriser

Rappel:

Identités remarquables : pour tous a et b réels ou complexes on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exercice 1: Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x :

a) $-(5x-4)(x-2)$ **b)** $\frac{5}{2}(2x-5)^2$

c) $(3x-5)(3x+5) - 3(x^2+1)$ **d)** $(x+x^2)^2$

e) $(5x+1)^2 - (5x-1)^2$ **f)** $(3x+1)^3$

Exercice 2: Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes :

a) $-(5x-4)(x-2) + (5x-4)$ **b)** $\frac{5}{2}(2x-5)^2 - (2x-5)$

c) $(3x-5)^2 - (9x+1)^2$ **d)** $(x+x^2)^2 - (x+1)^2$

e) $36x^2 - 4 - (x+5)(6x-2)$ **f)** $x^4 - 1$

<u>**Correction**</u>:

ex 1.

a) $-5x^2 + 14x - 8$, **b)** $10x^2 - 50x + \frac{125}{2}$, **c)** $6x^2 - 28$, **d)** $x^4 + 2x^3 + x^2$,
e) $20x$, **f)** $(3x+1)(3x+1)^2 = (3x+1)(9x^2+6x+1) = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

ex 2.

a) $(5x-4)(-(x-2)+1) = (5x-4)(-x+3)$,
b) $(2x-5)(\frac{5}{2}(2x-5)-1) = \frac{1}{2}(2x-5)(10x-27)$
c) $(3x-5-(9x+1))(3x-5+9x+1) = (-6x-6)(12x-4) = -24(x+1)(3x-1)$
d) $x^2(1+x)^2 - (x+1)^2 = (x+1)^2(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^3$
e) $(6x-2)(6x+2) - (x+5)(6x-2) = (6x-2)(6x+2-x-5) = (6x-2)(5x-3)$
f) $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

II Expressions rationnelles

Rappel:

Règles de calcul sur les fractions : Soient a, b, c, d et k des nombres réels ou complexes tels que $b \neq 0, d \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ mais ⚠ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{d} \neq \dfrac{a}{b+d}$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- $\dfrac{k \times a}{k \times b} = \dfrac{a}{b}$ (k doit être <u>en facteur</u> au numérateur et au dénominateur)
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ (ici il faut aussi $c \neq 0$)

Exercice 3: Réduire au même dénominateur et/ou simplifier les expressions rationnelles suivantes, supposées bien définies :

a) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{6} - 1$ **b)** $3 + \dfrac{2}{x-2}$ **c)** $\dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{x+2}{x+3}$

d) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{3}{x^2-x}$ **e)** $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{1+n} - \dfrac{1}{n}$ **f)** $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$

<u>**Correction**</u>:

ex 3.

a) $\dfrac{4^2}{3^2} - \dfrac{5}{6} - 1 = \dfrac{16 \times 2 - 5 \times 3 - 18}{18} = -\dfrac{1}{18}$, **b)** $\dfrac{3(x-2)+2}{x-2} = \dfrac{3x-4}{x-2}$,

c) $\dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{2x(x+3)+(x+2)(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} = \dfrac{4x^2+9x-2}{(2x-1)(x+3)}$

d) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{3}{x(x-1)} = \dfrac{x^2+3}{x(x-1)}$,

e) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{1+n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$

f) $\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \dfrac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \dfrac{6n^2(n+1)(n-1)^2}{4n(n-1)(n-1)(n+1)} = \frac{3}{2}n.$