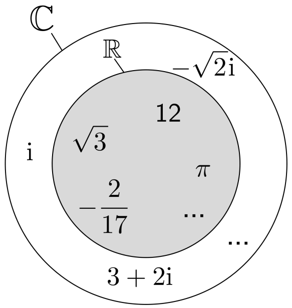
Nombres complexes : quelques bases

Ce document rappelle quelques notions essentielles vues au lycée ou en BTS/IUT concernant les nombres complexes. Pour se préparer à la rentrée en classe préparatoire, il est conseillé de bien travailler ce document mais aussi vos éventuels cours sur le sujet.



On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Il existe un ensemble appelé **ensemble des nombres complexes**, et noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ « est inclus dans » $\mathbb{C}$)
- $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ qui prolongent les addition et multiplication de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$ (« i » *comme « imaginaire »*).

Exemple : $2\mathrm{i}$ et $3+2\mathrm{i}$ sont des nombres complexes.
On a $2\mathrm{i}+3+2\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}\times(3+2\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2 = 6\mathrm{i}+4(-1) = -4+6\mathrm{i}$.

I Forme algébrique d'un nombre complexe

I.1 Généralités

Proposition :
Pour tout nombre complexe z, il existe un **unique** couple (a, b) de réels tel que $z = a + ib$. Cette écriture est appelée **forme algébrique de z**.

a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$
b est la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Exemples : Le nombre complexe $z = 3 - 2\mathrm{i}$ est écrit sous forme algébrique.

On a $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(3-2\mathrm{i}) = 3$ et $\mathrm{Im}(3-2\mathrm{i}) = -2$.

Le nombre complexe $z' = 5\mathrm{i}$ est aussi sous forme algébrique.

On a $\mathrm{Re}(5\mathrm{i}) = 0$ et $\mathrm{Im}(5\mathrm{i}) = 5$.

Remarque : Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que z est **imaginaire pur**. On note $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble de ces nombres.

Exercice 1: Quelques calculs dans $\mathbb{C}$ (mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$)
Ecrire sous forme algébrique :
a) $(2+3\mathrm{i}) + (4-5\mathrm{i})$ **b)** $(2+3\mathrm{i})(4-5\mathrm{i})$ **c)** $(2+3\mathrm{i})^2$

Correction:
a) $(2+3\mathrm{i}) + (4-5\mathrm{i}) = \boxed{6-2\mathrm{i}}$.
b) $(2+3\mathrm{i})(4-5\mathrm{i}) = 8 - 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2 = 8 + 2\mathrm{i} - 15(-1) = \boxed{23+2\mathrm{i}}$.
c) $(2+3\mathrm{i})^2 = 2^2 + 2\times2\times3\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 4 + 12\mathrm{i} - 9 = \boxed{-5+12\mathrm{i}}$.

Proposition :
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

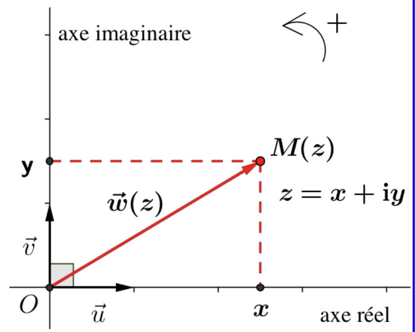
En particulier : $z = a + ib = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$

Il ne faut jamais écrire une inégalité entre nombres complexes : $\cancel{\mathrm{i} \leq \mathrm{i}+1}$ n'a aucun sens.

I.2 Interprétation géométrique d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé **plan complexe**

Proposition-Définition :
A tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut associer de façon bijective un et un seul point M de coordonnées $(x; y)$ et un seul vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ($\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$).



On dit que :
- M est l'**image** de z, notée $\mathrm{M}(z)$
- $\vec{w}$ est le **vecteur image** de z, noté $\vec{w}(z)$
- z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\vec{w}$.

Exemples : Le point $A(-1; 2)$ est l'image de $z_A = -1 + 2\mathrm{i}$.
$\vec{v}$ est le vecteur image de $z = \mathrm{i}$.

Proposition :
Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors

① le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

② le milieu du segment [AB] est le point d'affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

Exercice 2 :

a) Construire les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = -\frac{3}{2}\mathrm{i}$ et $z_C = 2-\mathrm{i}$.

b) Quelles sont les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$?

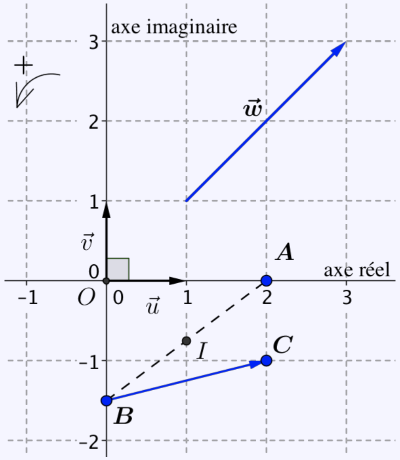
c) Représenter un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $2+2\mathrm{i}$.

d) Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$?

Correction:

On se place dans le plan complexe.

a) et **c)** ci-contre.



b) Le point I a pour affixe

$z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{2-\frac{3}{2}\mathrm{i}}{2} = 1-\frac{3}{4}\mathrm{i}.$

D'où les coordonnées du point I sont $(1;-\frac{3}{4})$.

d) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 2-\mathrm{i}-(-\frac{3}{2}\mathrm{i}) = 2+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}$.

Proposition :
Soient u et v deux vecteurs d'affixes z et z', alors

① le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$

② plus généralement le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z+\mu z'$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

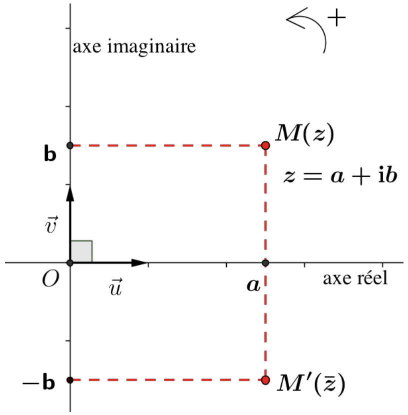
II Conjugué d'un nombre complexe

Définition : On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$, le nombre complexe noté $\boxed{\bar{z} = a - \mathrm{i}b}$.

Exemples : $\overline{1+\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}$, $\bar{i} = -\mathrm{i}$ et $\bar{2} = 2$.

Interprétation géométrique :

L'image M' de $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de l'image M de z.



Proposition :

① Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$, et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ si $z' \neq 0$.

② Pour tout nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$,

$z\bar{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2-(\mathrm{i}b)^2 = a^2-\mathrm{i}^2b^2 = \boxed{a^2+b^2}.$

③ Le nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.

Méthode: *Comment mettre un quotient sous forme algébrique ?*
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : $\dfrac{1+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{\underbrace{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}_{\text{On reconnait } z\bar{z}}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{3^2+4^2} = \dfrac{3-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-4(-1)}{25}$

$= \dfrac{7}{25} - \dfrac{1}{25}\mathrm{i}.$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation (E) : $(4-5\mathrm{i}+(2+3\mathrm{i})z)(2\mathrm{i}-z)=0$ dans $\mathbb{C}$ et écrire les solutions sous forme algébrique.

Correction:

Soit $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(4-5\mathrm{i}+(2+3\mathrm{i})z)(2\mathrm{i}-z)=0 &\iff 4-5\mathrm{i}+(2+3\mathrm{i})z=0 \text{ ou } 2\mathrm{i}-z=0\\ &\iff (2+3\mathrm{i})z=-4+5\mathrm{i} \text{ ou } z=2\mathrm{i}\\ &\iff z=\frac{-4+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} \text{ ou } z=2\mathrm{i}\end{aligned}$$

Ecrivons la solution $\dfrac{-4+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}\frac{-4+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(-4+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} &= \frac{(-4+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{2^2+3^2} \quad \text{(méthode vue précédemment)}\\ &= \frac{(-4+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{4+9}\\ &= \frac{-8+12\mathrm{i}+10\mathrm{i}-15(-1)}{13}\\ &= \frac{7}{13}+\frac{22}{13}\mathrm{i}\end{aligned}$$

On a bien mis la solution sous forme algébrique.

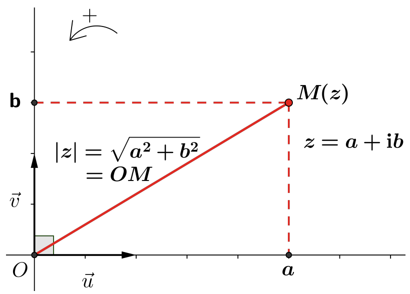
Bilan : L'ensemble des solutions de (E), écrites sous forme algébrique, est

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{13}+\frac{22}{13}\mathrm{i}\ ;\ 2\mathrm{i}\right\}.$$

III Module d'un nombre complexe

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z=a+ib$.

La distance OM est alors égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.



Définition : On appelle **module** du nombre complexe $z=a+ib$ et on note $|z|$ le nombre réel positif défini par

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}.$$

Interprétation géométrique :

- Soit M d'affixe z un point du plan complexe alors $|z|=OM=\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\|$.
- Soit $\vec{u}$ d'affixe z alors $|z|=\|\vec{u}\|$ (on pose $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$).
- Soient A et B deux points du plan d'affixes z_A et z_B alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe z_B-z_A d'où $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=AB=|z_B-z_A|$.

Exemple : Soient $A(4+2\mathrm{i})$ et $B(1+3\mathrm{i})$ deux points du plan complexe. On a

$OA=|z_A|=|4+2\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{5\times4}=2\sqrt{5}$ unités.

$AB=|z_B-z_A|=|1+3\mathrm{i}-4-2\mathrm{i}|=|-3+\mathrm{i}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ unités.

Proposition : Pour tous nombres complexes z et z',

① $|z|^2=z\bar{z}$ ② $|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$

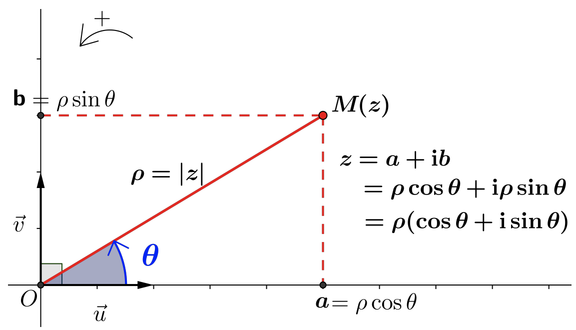
③ $|zz'|=|z|\times|z'|$ ④ Si $z'\neq0$ alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

⑤ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

⚠ en général $|z+z'|\neq|z|+|z'|$

IV Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z=a+\mathrm{i}b\neq0$.



Proposition-Définition :
Tout nombre complexe <u>non nul</u> z peut s'écrire $z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$\rho=|z|>0$ le module de z, et

$\theta\in\mathbb{R}$ une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ où M est l'image de z dans le plan complexe.

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique de z.**

Le réel θ est appelé <u>un</u> **argument de z**. Il n'est pas unique car défini à 2π près.

On note $arg(z)=\theta[2\pi]$.

⚠ **Si $z=0$ alors $|z|=0$ et il n'y a pas de notion d'argument et pas de forme trigonométrique.**

Exercice 4 :

1) Donner le module et un argument pour $2\mathrm{i}$, -1 et $1-\mathrm{i}$.

2) Ecrire z sous forme algébrique sachant que $|z|=3$ et $arg(z)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

3) Ecrire $z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.

<u>**Correction**</u>:

1) On détermine les modules avec la formule :

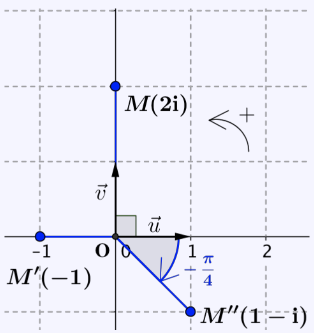
$|2\mathrm{i}|=\sqrt{0^2+2^2}=2$, $|-1|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$

et $|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

On peut ici déterminer les arguments graphiquement :

$arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $arg(-1)=\pi[2\pi]$

et $arg(1-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$.



On peut donc écrire ces nombres complexes sous forme trigonométrique :

$2\mathrm{i}=2(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$, $-1=(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$

et $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$.

2) $z=3(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})=3(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$.

<u>**Correction**</u>:

3) $z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ d'où $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$.

Soit θ un argument de z alors $z=2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-\mathrm{i}=2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)&\iff\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta\\&\iff\begin{cases}\sqrt{3}=2\cos\theta & \text{[parties réelles égales]}\\-1=2\sin\theta & \text{[parties imaginaires égales]}\end{cases}\\&\iff\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\\sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}\\&\iff\theta=-\frac{\pi}{6}[2\pi]\quad[\textit{cf.}\ \text{trigonométrie}].\end{aligned}$$

Bilan : $z=2\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$.

Proposition :

① Si $z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ alors $\bar{z}=\rho(\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta))$.

② Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à 2π près.

Remarque : Si $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ et $z'=\cos\theta'+\mathrm{i}\sin\theta'$ (les modules valent 1)

$$\begin{aligned}\text{alors } zz'&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta'+\mathrm{i}\sin\theta')\\&=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+\mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')\\&=\cos(\theta+\theta')+\mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\end{aligned}$$

Or l'exponentielle vérifie pour tous $x,x'\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{x'}=\mathrm{e}^{x+x'}$

<u>Notation</u> : On décide alors de noter $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

<u>Conséquences</u> : Le produit de $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ s'écrit $zz'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.

De plus la forme trigonométrique devient $\boxed{z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.}$

<u>*Exemples*</u> : En reprenant la question 1 de l'exercice 4 on a donc :

$2\mathrm{i}=2(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $-1=(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Et aussi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0=1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$ etc.