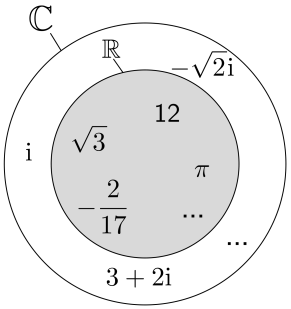
Nombres complexes : quelques bases du lycée

Ce document rappelle quelques notions essentielles vues au lycée ou en BTS/IUT concernant les nombres complexes. Pour se préparer à la rentrée en classe préparatoire, il est conseillé de retravailler la totalité de vos cours et exercices sur le sujet.



On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Il existe un ensemble appelé

ensemble des nombres complexes,

et noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ « est inclus dans » $\mathbb{C}$)
- $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ qui prolongent les addition et multiplication de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

I Forme algébrique d'un nombre complexe

I.1 Généralités

Proposition :
Pour tout nombre complexe z, il existe un **unique** couple (a, b) de réels tel que $z = a + \mathrm{i}b$. Cette écriture est appelée **forme algébrique de z**.

a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$
b est la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Exemples : Le nombre complexe $z = 3 - 2\mathrm{i}$ est écrit sous forme algébrique.

On a $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(3 - 2\mathrm{i}) = 3$ et $\mathrm{Im}(3 - 2\mathrm{i}) = -2$.

Le nombre complexe $z' = 5\mathrm{i}$ est aussi sous forme algébrique.

On a $\mathrm{Re}(5\mathrm{i}) = 0$ et $\mathrm{Im}(5\mathrm{i}) = 5$.

Remarque : Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que z est **imaginaire pur**. On note $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble de ces nombres.

Exercice 1: Quelques calculs dans $\mathbb{C}$ (mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$)
Ecrire sous forme algébrique :
a) $(2 + 3\mathrm{i}) + (4 - 5\mathrm{i})$ **b)** $(2 + 3\mathrm{i})(4 - 5\mathrm{i})$ **c)** $(2 + 3\mathrm{i})^2$

Correction:
a) $(2 + 3\mathrm{i}) + (4 - 5\mathrm{i}) = \boxed{6 - 2\mathrm{i}}$.
b) $(2 + 3\mathrm{i})(4 - 5\mathrm{i}) = 8 - 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2 = 8 + 2\mathrm{i} - 15(-1) = \boxed{23 + 2\mathrm{i}}$.
c) $(2 + 3\mathrm{i})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 4 + 12\mathrm{i} - 9 = \boxed{-5 + 12\mathrm{i}}$.

Proposition :
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

En particulier : $z = a + \mathrm{i}b = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$

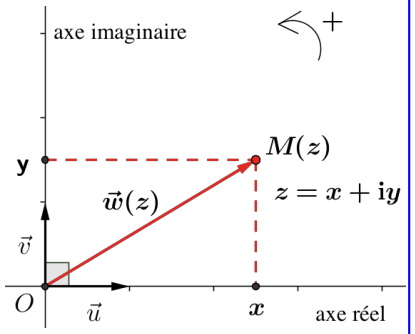
Il ne faut jamais écrire une inégalité entre nombres complexes : $\cancel{\mathrm{i} \leq \mathrm{i} + 1}$ n'a aucun sens.

I.2 Interprétation géométrique d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé **plan complexe**

Proposition-Définition :
A tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$
on peut associer de façon bijective
un et un seul point M de coordonnées $(x; y)$
et un seul vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$(\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

On dit que :
- M est l'**image** de z, notée $\mathrm{M}(z)$
- $\vec{w}$ est le **vecteur image** de z, noté $\vec{w}(z)$
- z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\vec{w}$.



Exemples : Le point $A(-1; 2)$ est l'image de $z_A = -1 + 2\mathrm{i}$.
$\vec{v}$ est le vecteur image de $z = \mathrm{i}$.

Proposition :
Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors

① le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

② le milieu du segment [AB] est le point d'affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exercice 2 :

a) Construire les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = -\frac{3}{2}\mathrm{i}$ et $z_C = 2 - \mathrm{i}$.
b) Quelles sont les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$?
c) Représenter un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $2 + 2\mathrm{i}$.
d) Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$?

Correction:

On se place dans le plan complexe.

a) et **c)** ci-contre.

b) Le point I a pour affixe

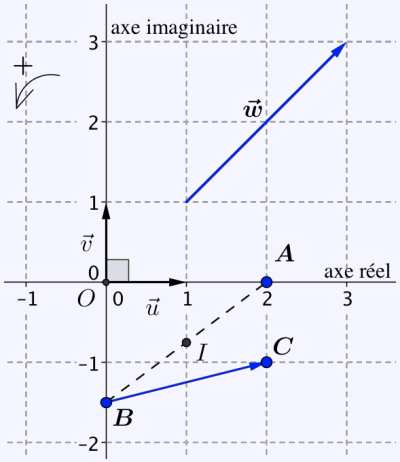
$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2 - \frac{3}{2}\mathrm{i}}{2} = 1 - \frac{3}{4}\mathrm{i}$.

D'où les coordonnées du point I sont $(1; -\frac{3}{4})$.

d) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 2 - \mathrm{i} - (-\frac{3}{2}\mathrm{i}) = 2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.



Proposition :
Soient u et v deux vecteurs d'affixes z et z', alors

① le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$

② plus généralement le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z + \mu z'$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

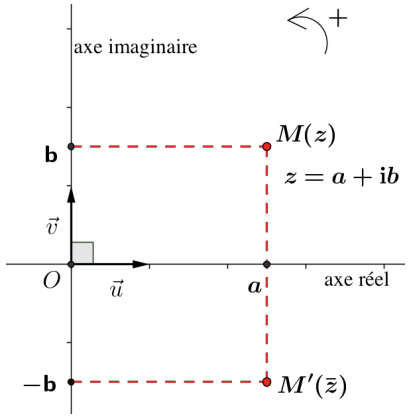
II Conjugué d'un nombre complexe

Définition : On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, le nombre complexe noté $\boxed{\bar{z} = a - \mathrm{i}b}$.

Exemples : $\overline{1 + \mathrm{i}} = 1 - \mathrm{i}$, $\bar{i} = -\mathrm{i}$ et $\bar{2} = 2$.

Interprétation géométrique :

L'image M' de $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de l'image M de z.



Proposition :

① Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$,
et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ si $z' \neq 0$.

② Pour tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$,

$z\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2b^2 = \boxed{a^2 + b^2}$.

③ Le nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.

Méthode: ***Comment mettre un quotient sous forme algébrique ?***
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i})}{\underbrace{(3 + 4\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i})}_{\text{On reconnait } z\bar{z}}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i})}{3^2 + 4^2} = \dfrac{3 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 4(-1)}{25}$

$= \dfrac{7}{25} - \dfrac{1}{25}\mathrm{i}$.

Exercice 3 :

Résoudre l'équation (E) : $(4-5\mathrm{i}+(2+3\mathrm{i})z)(2\mathrm{i}-z)=0$ dans $\mathbb{C}$ et écrire les solutions sous forme algébrique.

Correction:

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(4-5\mathrm{i}+(2+3\mathrm{i})z)(2\mathrm{i}-z)=0 &\iff 4-5\mathrm{i}+(2+3\mathrm{i})z=0 \text{ ou } 2\mathrm{i}-z=0\\ &\iff (2+3\mathrm{i})z=-4+5\mathrm{i} \text{ ou } z=2\mathrm{i}\\ &\iff z=\frac{-4+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} \text{ ou } z=2\mathrm{i}\end{aligned}$$

Ecrivons la solution $\dfrac{-4+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}\frac{-4+5\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(-4+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}&=\frac{(-4+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{2^2+3^2} \quad \text{(méthode vue précédemment)}\\ &=\frac{(-4+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{4+9}\\ &=\frac{-8+12\mathrm{i}+10\mathrm{i}-15(-1)}{13}\\ &=\frac{7}{13}+\frac{22}{13}\mathrm{i}\end{aligned}$$

On a bien mis la solution sous forme algébrique.

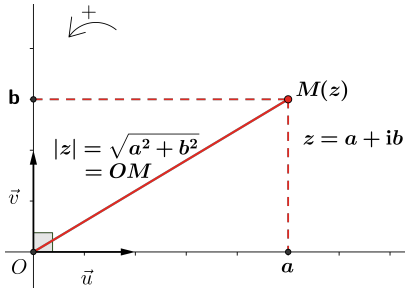
Bilan : L'ensemble des solutions de (E), écrites sous forme algébrique, est

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{13}+\frac{22}{13}\mathrm{i}\ ;\ 2\mathrm{i}\right\}.$$

III Module d'un nombre complexe

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z=a+\mathrm{i}b$.

La distance OM est alors égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.



Définition : On appelle **module** du nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ et on note $|z|$ le nombre réel positif défini par

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}.$$

Interprétation géométrique :

- Soit M d'affixe z un point du plan complexe alors $|z|=OM=\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\|$.
- Soit $\vec{u}$ d'affixe z alors $|z|=\|\vec{u}\|$ (on pose $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$).
- Soient A et B deux points du plan d'affixes z_A et z_B alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe z_B-z_A d'où $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=AB=|z_B-z_A|$.

Exemple : Soient $A(4+2\mathrm{i})$ et $B(1+3\mathrm{i})$ deux points du plan complexe. On a

$OA=|z_A|=|4+2\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{5\times 4}=2\sqrt{5}$ unités.

$AB=|z_B-z_A|=|1+3\mathrm{i}-4-2\mathrm{i}|=|-3+\mathrm{i}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ unités.

Proposition : Pour tous nombres complexes z et z',

① $|z|^2=z\bar{z}$ ② $|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$

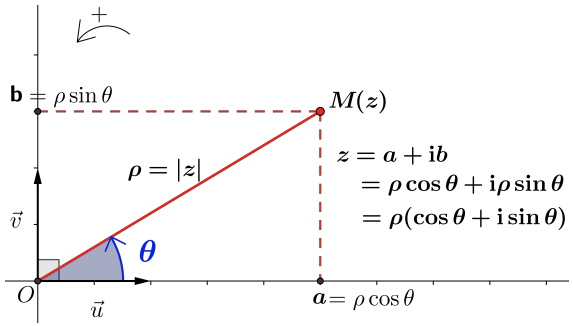
③ $|zz'|=|z|\times|z'|$ ④ Si $z'\neq 0$ alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

⑤ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

⚠ en général $|z+z'|\neq|z|+|z'|$

IV Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z=a+\mathrm{i}b\neq 0$.



Proposition-Définition :
Tout nombre complexe <u>non nul</u> z peut s'écrire $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec

$\rho = |z| > 0$ le module de z, et

$\theta \in \mathbb{R}$ une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$ où M est l'image de z dans le plan complexe.

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique de z.**

Le réel θ est appelé <u>un</u> **argument de z**. Il n'est pas unique car défini à 2π près.

On note $arg(z) = \theta[2\pi]$.

⚠ **Si $z = 0$ alors $|z| = 0$ et il n'y a pas de notion d'argument et pas de forme trigonométrique.**

Exercice 4 :

1) Donner le module et un argument pour 2i, -1 et $1 - \mathrm{i}$.

2) Ecrire z sous forme algébrique sachant que $|z| = 3$ et $arg(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

3) Ecrire $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.

<u>Correction</u>:

1) On détermine les modules avec la formule :

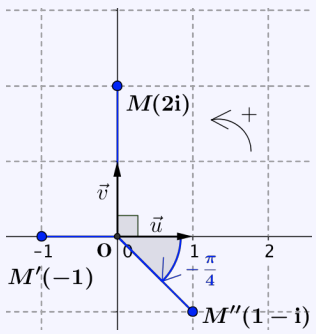
$|2\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

et $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

On peut ici déterminer les arguments graphiquement :

$arg(2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $arg(-1) = \pi[2\pi]$

et $arg(1 - \mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.



On peut donc écrire ces nombres complexes sous forme trigonométrique :

$2\mathrm{i} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$, $-1 = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$

et $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$.

2) $z = 3(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}) = 3(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$.

<u>Correction</u>:

3) $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ d'où $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Soit θ un argument de z alors $z = 2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) &\iff \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\cos\theta + 2\mathrm{i}\sin\theta \\
&\iff \begin{cases} \sqrt{3} = 2\cos\theta \text{ [parties réelles égales]} \\ -1 = 2\sin\theta \text{ [parties imaginaires égales]} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \theta = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{[\textit{cf.} trigonométrie]}.
\end{aligned}$$

Bilan : $z = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$.

Proposition :

① Si $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ alors $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta))$.

② Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à 2π près.

Remarque : Si $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'$ (les modules valent 1)

$$\begin{aligned}
\text{alors } zz' &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\
&= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\
&= \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')
\end{aligned}$$

Or l'exponentielle vérifie pour tous $x, x' \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{x'} = \mathrm{e}^{x+x'}$

<u>Notation</u> : On décide alors de noter $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

<u>Conséquences</u> : Le produit de $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ s'écrit $zz' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.

De plus la forme trigonométrique devient $\boxed{z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.}$

<u>Exemples</u> : En reprenant la question 1 de l'exercice 4 on a donc :

$2\mathrm{i} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $-1 = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Et aussi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ etc.